Über die

Flächen, welche dem partikulären Integrale der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = o$ entsprechen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

verfasst und

der hohen philosophischen Fakultät, Sektion II,

der k. Ludwig-Maximilians-Universität München

am 1. Juni 1900

vorgelegt von

AUGUST WENDLER

kgl. Gymnasiallehrer.

MÜNCHEN, 1900

Dr. H. LÜNEBURG'S BUCHHANDLUNG

(E. REINHARDT)

Maximiliansplatz 3

Über die
Flächen, welche dem partikulären Integrale der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = o$ entsprechen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

verfasst und

der hohen philosophischen Fakultät, Sektion II,

der k. Ludwig-Maximilians-Universität München

am 1. Juni 1900

vorgelegt von

AUGUST WENDLER

kgl. Gymnasiallehrer.

ACAD. LUGD BAT. BIBL.

MÜNCHEN, 1900

Dr. H. LÜNEBURG'S BUCHHANDLUNG

(E. REINHARDT)

Maximiliansplatz 3

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn k. Gymnasialrektor Christoph Dietsch,

Mitglied des obersten Schulrates,

in Dankbarkeit gewidmet

vom Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552320_0012

EINLEITUNG.

Der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = o$ entsprechen bekanntlich $z = \varphi(x) \pm \psi$ (y) und $z = f(x) \pm f(y)$ als allgemeine, bezw. partikuläre Integralflächen. Die Theorie dieser Integralflächen ist in der von Sophus Lie geschaffenen Theorie der Translationsflächen enthalten. — Vergl. S. Lie »Geometrie der Berührungstransformationen« Lpz. 1896. 1. Bd. pag. 376 ff., ferner S. Lie »Untersuchungen über Translationsflächen«. II. Ak. Lpz. 1892. —

Somit bleibt bezüglich der Flächen $z = f(x) \pm f(y)$ als Translationsflächen nur wenig zu sagen, was nicht schon bekannt wäre.

Dagegen geben die Partikularflächen $z = f(x) \pm f(y)$, welche nachfolgend mit Rücksicht auf das positive und negative Verbindungszeichen kurz P- und N-flächen genannt werden, bei ihrer einfachen, bezüglich der unabhängigen Variablen mehr oder weniger symmetrischen Gleichheitsform zu analytischen und geometrischen Betrachtungen Anlass, aus denen viele nicht uninteressante Beziehungen resultieren. Indem ferner die Bestimmung der Funktion f aus beliebig angenommenen Eigenschaften der P- und N-flächen grossenteils von Funktionalgleichungen abhängt, über deren Lösbarkeit man leicht entscheiden kann (Magnus'sche Gleichungen) lag es nahe, solche Bestimmungen in grösserem Umfang vorzunehmen. (II. Teil.) Diese führten auf Flächen, welche im II. Teil diskutiert sind und auch in anderem Zusammenhang von Interesse sein dürften. (Z. B. Fläche der Liouville'schen Klasse.)

Indem nachstehende Arbeit der mir von Herrn Geheimrat Professor Dr. G. Bauer in München bei anderer Gelegenheit gestellten Aufgabe entsprungen ist, die Funktion f in den Gleichungen $z = f(x) \pm f(y)$ aus angenommenen Eigenschaften von Kurven auf jenen Flächen zu bestimmen und die so erhaltenen Flächen zu diskutieren, so fühle ich mich demselben für seine gütige Anregung zu herzlichem Dank verpflichtet.

I. Teil.

Allgemeine Untersuchungen.

A) Charakterisierung der Flächen $z = f(x) \pm f(y)$ als Translationsflächen.

§ 1. Setzt man $x = u,\ y = v,\ z = f(u) \pm f(v)$, so dass also die zur xz- und yz-ebene parallelen Schnitte die Parameterlinien u, v liefern, so erhält man für die 6 Fundamentalgrössen der Flächentheorie:

$$E = 1 + f'^2(u),\quad G = 1 + f'^2(v),\quad F = \pm f'(u)\,.\,f'(v),$$
$$S\,.\,D = f''(u),\quad S\,.\,D' = o,\quad S\,.\,D'' = \pm f''(v),$$
$$S = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + f'^2(u) + f'^2(v)}\ ^{1})$$

Aus

$$S\,.\,D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ergiebt sich also $D' = o$ vermöge

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = o.$$

Diese Gleichungen werden allgemein befriedigt durch:
$x = f_1(u) + \varphi_1(v),\ y = f_2(u) + \varphi_2(v),\ z = f_3(u) + \varphi_3(v)$. ²)

Auf der so definierten Fläche bilden wegen $D' = o$ die Parameterlinien ein konjugiertes System, während die Fläche eine Translationsfläche ist, indem durch Translation der Kurve:

---

¹) Es sei ein für allemal bemerkt, dass, wenn nicht ausdrücklich anders verfügt wird, hier wie in allen Relationen, in denen doppelte Vorzeichen auftreten, sich die oberen auf die P-, die unteren auf die N-flächen beziehen.

²) Luigi Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Uebersetzung von Max Lukat, Leipz. 1896. 1.Lief. § 59.

$x = f_1(u)$, $y = f_2(u)$, $z = f_3(u)$ jeder Punkt derselben eine der Kurve: $x = \varphi_1(v)$, $y = \varphi_2(v)$, $z = \varphi_3(v)$ kongruente Kurve beschreibt und umgekehrt, so dass die Erzeugung durch Translation eine doppelte ist.

§ 2. Im vorliegenden Fall ist

$$f_1(u) = u,\ \varphi_1(v) = o,\ f_2(u) = o,\ \varphi_2(v) = o,\ f_3(u) = f(u),$$
$$\varphi_3(v) = \pm f(v),$$

so dass $x = u$, $z = f(u)$ oder $z = f(x)$ und $y = v$, $z = \pm f(v)$ oder $z = \pm f(y)$

je durch Translation die beiden Serien kongruenter und zwar ebener Kurven

$$z = f(x) + C,\ z = \pm f(y) + C$$

erzeugen. Diese Thatsache ist in leicht ersichtlicher Weise für die Modellierung solcher Flächen von Bedeutung, indem die ebenen Schnitte

$z = f(x) + f(c)$ und $z = f(y) + f(c)$ bezw. $z = f(x) - f(c)$ und $z = -(f(y) - f(c))$

leicht zu erhalten sind, wenn die Kurve $\eta = f(\xi)$ einmal genau aufgezeichnet ist. Als Probe der Genauigkeit beim Zusammenstecken der Schnitte kann dabei die Thatsache dienen, dass bei den N-flächen die durch die Diagonalebene $y = x$ ausgeschnittene Kurve die Gerade $z = o$, $y = x$ werden muss, während bei den P-flächen die Ordinaten der Diagonalkurve, wie in ihrer Projektion $z = 2f(x)$, doppelt so gross als die der erzeugenden Kurve $z = f(x)$ ausfallen müssen.

Nach einem von S. Lie angegebenen Satz (Bianchi, pag. 113) über Translationsflächen ist die Fläche

$$z = f(x) \pm f(y)$$

der Ort der Mittelpunkte aller Strecken, welche die Punkte der Kurve:

$$x_1 = 2u,\ y_1 = o,\ z_1 = 2f(u) \text{ d. h. } z_1 = 2f\left(\frac{x_1}{2}\right)$$

mit denen der Kurve:

$$x_2 = o,\ y_2 = 2v,\ z_2 = \pm 2f(v) \text{ d. h. } z_2 = \pm 2f\left(\frac{y_2}{2}\right) \text{ verbinden.}$$

Auf Grund dieser Ergebnisse kann man leicht durch graphische Darstellung von dem Verlaufe der P- und N-flächen eine Vorstellung gewinnen, indem man sich einer schiefen Parallelprojektion bedient, bei der alle auf der Papierebene senkrecht zu denkenden Strecken in halber wahrer Grösse unter einer Neigung von 30^0 gegen die negative x-axe erscheinen. Die zu zeichnenden Sehnenmitten, die ja bei der Parallelprojektion Mitten bleiben, findet man bequem mittelst eines Proportionalzirkels für Zweiteilung.

B) Geometrische und analytische Symmetriebeziehungen.

§ 1. Aus der Gleichung $z = f(x) + f(y)$ ersieht man zunächst, dass die P-flächen immer die Symmetrieebene $y = x$ haben. Bei gerader Funktion f sind auch die drei Ebenen $y = -x$, $x = o$, $y = o$ Symmetrieebenen. Bei ungerader Funktion f, in welchem Fall die Gerade $z = o$, $y = -x$ ganz auf der Fläche liegt und Symmetrieaxe ist, wird der Koordinatenursprung ein Symmetriecentrum.

Für die N-flächen ist die Flächengerade $z = o$, $y = x$ immer eine Symmetrieaxe, die Gerade $z = o$, $y = -x$ nur bei geradem f, in welchem Falle auch die Ebenen $x = o$ und $y = o$ Symmetrieebenen sind.

Auf den P- und N-flächen giebt es eine Reihe von Kurven, deren Projektionen in der xy-ebene die Symmetrielinie $y = x$ besitzen.

Man ersieht dies z. B. aus den Gleichungen:

$f(x) + f(y) = C$ für die Niveaulinien der P-flächen,

$\int \frac{dx}{f'(x)} + \int \frac{dy}{f'(y)} = C$ für die Falllinien der N-flächen,

$\int dx \sqrt{f''(x)} + \int dy \sqrt{f''(y)} = C$ für die eine Asymptotenschar der N-flächen,

$\pm f''(x) \cdot f''(y) = C \cdot S^4$ für die Kurven konstanter Krümmung,

$f'^2(x) + f'^2(y) = \text{Cotang } {}^2\!/_0$ für die Kurven isokliner Normalen

u. s. w.

Alle diese Gleichungen sind in der allgemeinen Form:

$$\sigma(x, y) = C$$

enthalten, wo σ eine symmetrische Funktion der Variablen bedeutet. Indem aus dieser Gleichung vermöge

$$\sigma(x, y) \equiv \sigma(y, x)$$

gleichzeitig $y = \vartheta(x)$ und $x = \vartheta(y)$ folgt, resultiert die Funktionalbeziehung:

$$\vartheta(\vartheta(x)) \equiv x$$

und somit der Satz: »Ist eine Funktion $\vartheta(x)$ involutorisch, d. h. genügt sie identisch der Gleichung: $\vartheta(\vartheta(x)) \equiv x$, so hat die durch $y = \vartheta(x)$ definierte Kurve die Symmetrielinie $y = x$.[1])

Indem sich, wie weiterhin gezeigt wird, diese involutorischen Funktionen zur Gewinnung geometrischer Resultate benutzen lassen, sei zunächst an dieser Stelle eine kleine Digression auf die Ableitung einiger Eigenschaften solcher Funktionen gestattet.[2])

Aus der Vertauschbarkeit von x und y in $y = \vartheta(x)$ folgt die Identität:

$$\int_x^y f(y)\,dx \equiv \int_y^x f(x)\,dy$$

wobei f eine ganz beliebige Funktion bedeutet. Es ist also

$$\text{I.} \quad \int_\alpha^{\vartheta(\alpha)} f(\vartheta(x))\,dx + \int_\alpha^{\vartheta(\alpha)} f(x)\,.\,\vartheta'(x)\,dx = o$$

für jede involutorische Funktion bei beliebigem Parameter α und beliebiger Funktion f. Aus I. folgt durch partielle Integration des zweiten Integrals:

---

[1]) Die Beziehung $\vartheta(\vartheta(x)) \equiv x$ ist auch geometrisch evident. Aus Fig. 1 folgt wegen der Kongruenz der Dreiecke $OP'A'$ und OPA: $OP' = x$, $P'A' = \vartheta(x)$, $OP = \vartheta(x)$, $PA = \vartheta(\vartheta(x)) = OP' = x$.

[2]) Die folgenden Ableitungen sind meiner bisher nicht veröffentlichten Arbeit „Ueber involutorische Funktionen“ entnommen.

II $$\int_{\alpha}^{\vartheta(\alpha)} f(\vartheta(x))\,dx = f(\alpha)\,.\,\vartheta(\alpha) - \alpha\,.\,f(\vartheta(\alpha)) + \int_{\alpha}^{\vartheta(\alpha)} \vartheta(x)\,.\,f'(x)\,dx.$$ [1])

Aus I. erhält man ferner wegen

$$\vartheta'(\vartheta(x))\,.\,\vartheta'(x) = 1$$

den »Reciprokalsatz«, der sich in den Gleichungen ausspricht:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\vartheta(\alpha)} f\left(\frac{1}{\vartheta'(x)}\right)dx + \int_{\alpha}^{\vartheta(\alpha)} f(\vartheta'(x))\,.\,\vartheta'(x)\,dx \\ &\int_{\alpha}^{\vartheta(\alpha)} f(\vartheta'(x))\,dx + \int_{\alpha}^{\vartheta(\alpha)} f\left(\frac{1}{\vartheta'(x)}\right).\,\vartheta'(x)\,dx \end{aligned}\right\}$$ III. [2])

Ein Spezialfall hievon ist:

$$\text{IV.}\quad \int_{\alpha}^{\vartheta(\alpha)} \vartheta'^{n+1}(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\vartheta(\alpha)} \frac{dx}{\vartheta'^{n}(x)} = o.$$

Sind $\vartheta(x)$ und $\Theta(x)$ zwei verschiedene involutorische Funktionen und ist für ein ganz bestimmtes α_0

$$\vartheta(\alpha_0) = \Theta(\alpha_0) = \alpha'$$

so erhält man aus $\int_{\alpha_0}^{\alpha'} \Theta(\vartheta(x))\,dx = -\int_{\alpha_0}^{\alpha'} \Theta(x)\,.\,\vartheta'(x)\,dx$ und der hieraus durch Vertauschung von Θ mit ϑ hervorgehenden Formel durch Addition:

---

[1]) Ein spezieller Fall wäre

$$\int_{o}^{\vartheta(o)} \vartheta^{n}(x)\,dx = n\,.\int_{o}^{\vartheta(o)} x^{n-1}\,.\,\vartheta(x)\,dx$$

eine Relation, die für $n = 2, 3, 4$ durch Schwerpunkt und Trägheitsmoment leicht mechanisch interpretiert werden kann.

[2]) Dieser Reciprokalsatz resultiert aus Gleichung I, wenn man im ersten Fall $f(\vartheta'(x))$, im zweiten Fall $f\left(\frac{1}{\vartheta'(x)}\right)$ an Stelle von $f(x)$ setzt.

$$\text{V.} \quad \int_{\alpha_0}^{\alpha'} dx \,[\Theta(\vartheta(x)) + \vartheta(\Theta(x))] = \alpha'^2 - \alpha_0^2$$

d. h. „*Der Mittelwert der Funktion* $y = \Theta(\vartheta(x)) + \vartheta(\Theta(x))$ *für die Grenzen* α_0 *und* $\alpha' = \Theta(\alpha_0) = \vartheta(\alpha_0)$ *ist gleich der Summe der Grenzen*".

Setzt man $\int f(\vartheta(x))\,dx = \Phi(x)$, $\int f(x) \cdot \vartheta'(x)\,dx = \Psi(x)$

in der Gleichung $\int_x^{\vartheta(x)} f(\vartheta(x))\,dx = -\int_x^{\vartheta(x)} f(x) \cdot \vartheta'(x)\,dx$

so lautet diese:

$$\Phi(\vartheta(x)) + \Psi(\vartheta(x)) = \Phi(x) + \Psi(x),$$

d. h. die Funktion

$$p(x) = \Phi(x) + \Psi(x) = \int [f(\vartheta(x)) + f(x) \cdot \vartheta'(x)]\,dx$$

hat die Periode $\vartheta(x)$, unabhängig von der Natur der Funktion f.[1]

Nach diesen Bemerkungen erledigen sich leicht einige geometrische Aufgaben:

1) Schneiden sich zwei N-flächen ausser in $y = x$, $z = o$ noch ausserdem, so hat, wie man aus

$$f_1(x) - f_2(x) = f_1(y) - f_2(y)$$

ersieht, die Projektion der Schnittlinie in der xy-ebene die Symmetrielinie $y = x$, ist also eine involutorische Kurve. Soll man nun zu einer gegebenen N-fläche $z_2 = f_2(x) - f_2(y)$ die N-flächen $z_1 = f_1(x) - f_1(y)$ finden, so dass jene involutorische Kurve $y = \vartheta(x)$ vorgegeben ist, so entnimmt man aus

$$f_1(x) - f_2(x) = f_1(\vartheta(x)) - f_2(\vartheta(x)),$$

dass die Funktion $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$ die Periode $\vartheta(x)$ haben muss, sodass man also zu setzen hat:

$$f_1(x) = f_2(x) + \sigma(x, \vartheta(x)),$$

wo σ eine symmetrische Funktion der Argumente ist.

---

[1]) Die allgemeinste Funktion mit der Periode $\vartheta(x)$ wäre

$$\sigma(x, \vartheta(x)) - \sigma(\vartheta(x), x),$$

wo σ eine beliebige bezüglich der Argumente symmetrische Funktion ist.

2) Der allgemeinen Lösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung entspricht bekanntlich die Schar von Integralflächen, welche soviele Flächen umfasst, dass es unter ihnen stets eine giebt, die eine allgemein gewählte Kurve enthält und längs derselben nach einem allgemein gewählten Gesetz eine vorgeschriebene Tangentialebene hat. Daher gelangte S. Lie zu folgendem Resultat: »Wünscht man die Integralfläche der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = 0$$

die eine gegebene Raumkurve enthält:

$$x = \mathfrak{x}(t), \ [t = \varphi(x)]; \ y = \mathfrak{y}(t), \ [t = \psi(y)]; \ z = \mathfrak{z}(t)$$

und längs derselben die Ebenen berührt, deren Richtungskoefficienten die Werte haben:

$$\operatorname{Cos}(\alpha) = X(t), \ \operatorname{Cos}\beta = Y(t), \ \operatorname{Cos}\gamma = Z(t),$$

so berechnet man zuerst die Integrale:

$$\int \frac{X(t)}{Z(t)} \, d\,\mathfrak{x}(t), \int \frac{Y(t)}{Z(t)} \, d\,\mathfrak{y}(t)$$

und drückt diese sodann mit Benutzung von $x = \mathfrak{x}(t)$ und $y = \mathfrak{y}(t)$, als Funktionen von x bezw. y aus, nämlich:

$$\int \frac{X(t)}{Z(t)} \, d\,\mathfrak{x}(t) = \int \frac{X(\varphi(x))}{Z(\varphi(x))} \, dx = F(x)$$

$$\int \frac{Y(t)}{Z(t)} \, d\,\mathfrak{y}(t) = \int \frac{Y(\psi(y))}{Z(\psi(y))} \, dy = \Phi(y)$$

Alsdann ist $-z = F(x) + \Phi(y)$ die gesuchte Integralfläche.«

Dabei genügen natürlich die Grössen X, Y, Z den beiden Gleichungen:

$$\text{I.} \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

$$\text{II.} \quad X\mathfrak{x}' + Y\mathfrak{y}' + Z\mathfrak{z}' = 0.$$

Sollen auch partikuläre Integralflächen in der Lösung enthalten sein, so muss wegen $F = f = \Phi$ noch eine dritte Bedingungsgleichung erfüllt sein, nämlich:

$$\text{III.} \quad \frac{X(\varphi)}{Z(\varphi)} = \frac{Y(\psi)}{Z(\psi)}.$$

Alsdann wird $f(u)$ ausgedrückt durch:

$$f(u) = \int \frac{X(\varphi(u))}{Z(\varphi(u))}\, du = \int \frac{Y(\psi(u))}{Z(\psi(u))}\, du.$$

Setzt man nun:

$$\frac{X}{\sqrt{1-(X^2+Y^2)}} = g, \quad \frac{Y}{\sqrt{1-(X^2+Y^2)}} = h,$$

so sind noch die beiden Gleichungen zu erfüllen:

$$(1)\quad X\xi' + Y\eta' + Z\zeta' = 0$$
$$(2)\quad g(\varphi) = h(\psi),$$

sodass von den fünf Funktionen X, Y, ξ, η, ζ drei disponibel bleiben. Die Gleichung (2) kann man z. B. so befriedigen: Setzt man $\psi(x) = \tau$, also $\varphi(x) = \varphi(\eta(\tau))$, so ist:

$$g[\varphi(\eta(\tau))] = g(\tau)$$

d. h. $g(x)$ soll eine Funktion mit der Periode $\varphi(\eta)$ sein. Für

$$\varphi(\eta(\tau)) = \vartheta(\tau).$$

mit ϑ als involutorischer Funktion, ist nach Früherem eine solche periodische Funktion durch $\underset{\vartheta}{\sigma}(\tau) = \sigma(\tau, \vartheta(\tau))$ gegeben, wenn σ eine symmetrische Funktion der Argumente bedeutet. Aus dieser Annahme folgt ferner:

$$\eta(x) = \xi(\vartheta(x)); \quad g(x) = \underset{\vartheta}{\sigma}(x);$$

$$\zeta(x) = -\int dx \left\{ \xi'(x) + \xi'(\vartheta(x)) \cdot \vartheta'(x) \right\} \underset{\vartheta}{\sigma}(x);$$

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2\,\underset{\vartheta}{\sigma}^2(x)}}; \quad X(x) = Y(x) = \frac{\underset{\vartheta}{\sigma}(x)}{\sqrt{1+2\,\underset{\vartheta}{\sigma}^2(x)}}$$

Diese Ergebnisse lassen sich in den Satz zusammenfassen:

»*Bedeutet $\xi(t)$ eine beliebige Funktion mit der Umkehrung φ, $\vartheta(t)$ eine beliebige involutorische und $\sigma(t, \vartheta(t))$ eine in Bezug auf die Argumente beliebige symmetrische Funktion, so enthält die P-fläche*

$$-z = \int dx\, \sigma(\varphi(x), \vartheta(\varphi(x)) + \int dy\, \sigma(\varphi(y), \vartheta(\varphi(y))$$

die Raumkurve:

$$x = \mathfrak{x}(t),\ y = \mathfrak{x}(\vartheta(t)),\ z = -\int_{\vartheta}^{\sigma(t)} \left\{ \mathfrak{x}'(t) + \mathfrak{x}'(\vartheta(t)) \cdot \vartheta'(t) \right\} dt$$

und berührt längs derselben die Ebenen mit den Richtungskoefficienten:

$$\operatorname{Cos}\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\,\sigma^2(t)}},\quad \operatorname{Cos}\alpha = \operatorname{Cos}\beta = \frac{\overset{\sigma(t)}{\vartheta}}{\sqrt{1 + 2\,\sigma^2(t)}}\ ^{1})$$

§ 2. Ein allgemeiner von Lelieuvre gefundener Satz heisst: »Kennt man drei linear unabhängige partikuläre Lösungen ξ, η, ζ einer willkürlich gewählten Laplace'schen Gleichung $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\,\partial v} = M \cdot \vartheta$, wo M eine beliebige Funktion von u und v ist, so ergeben die Lelieuvre'schen Formeln[2]) mittelst Quadraturen eine Fläche, auf der die Kurven u, v Haupttangentenkurven sind und deren Krümmungsmass K in jedem Punkt gegeben ist durch:

$$K = -\frac{1}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2}.«$$

Für $M = o$ erhält man die durch:

$$\xi = u,\ \eta = v,\ \zeta = f(u) \pm f(v)$$

zu befriedigende Gleichung $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\,\partial v} = o$, also als Lelieuvre'sche Formeln:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -v f'(u),\ \frac{\partial x}{\partial v} = \pm v f'(v) - f(u) \mp f(v),\ \frac{\partial z}{\partial u} = v.$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -f(u) \mp f(v) + u f'(u),\ \frac{\partial y}{\partial v} = \mp u f'(v),\ \frac{\partial z}{\partial v} = u.$$

Hieraus aber folgen durch Quadraturen die Flächen:

$$x = -v\,(f(u) \mp f(v)) \mp 2 \int f(v)\,dv,$$

$$y = u\,(f(u) \mp f(v)) - 2 \int f(u)\,du,\ z = uv.$$

---

[1]) Die Projektion jener Raumkurve in der xy-ebene ist natürlich bezüglich x und y symmetrisch; denn aus $t = \varphi(x)$, $\vartheta(t) = \varphi(y)$ oder $t = \vartheta(\varphi(y))$ folgt: $\varphi(x) = \vartheta(\varphi(y))$ und $\varphi(y) = \vartheta(\varphi(x))$.

[2]) Bianchi, pag. 132, 18.

Bei Berücksichtigung der oberen Zeichen (P-flächen als Ausgangsflächen) ersieht man, dass die Vertauschung von u und v auch die von x und y zur Folge hat, d. h. *jeder Asymptotenkurve entspricht eine zweite durch Symmetrie in Bezug auf die Ebene $y = x$.* [1])

§ 3. Von Interesse sind auch solche Flächen, die von den P- und N-flächen abgeleitet, mit diesen in einem unmittelbaren geometrischen Zusammenhang stehen und selbst wieder P- oder N-flächen sind. Setzt man z. B.

$$\underset{P}{z} = f(x) + f(y), \quad \underset{N}{z} = f(x) - f(y)$$

und betrachtet die Grösse $\underset{P}{z} \,.\, \underset{N}{z}$ als neue Flächenordinate, so hat man in

$$z = \underset{P}{z} \,.\, \underset{N}{z} = f^2(x) - f^2(y)$$

eine abgeleitete N-fläche, die nachfolgend kurz N^2-fläche genannt ist.

Zu jeder P- und N-fläche gehört ferner eine »T-fläche«, zu deren Ableitung die Tangentialebenen der Ausgangsflächen benutzt werden. (Fig. 2.)

Denkt man sich nämlich in einem Flächenpunkt P die die z-axe treffende Tangente PS gezeichnet und in irgend einem Punkt P' derselben zu OQ die Parallele, so schneidet diese die ursprüngliche Ordinate PQ in einem Punkt $\overset{\lambda}{\underset{T}{P}}$, der wieder

---

[1]) Indem die Koordinaten $x = u$, $y = v$, $z = f(u) \pm f(v)$ der P- und N-flächen die Gleichung $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \, \partial v} = o$ erfüllen, lässt sich leicht das Problem der unendlich kleinen Verbiegungen erledigen. Nach der Bianchi pag. 307 gegebenen Methode hat man nämlich zur Bestimmung der dort eingeführten Hilfsfunktionen d, d', d'' wegen

$$d' = o, \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = o, \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = o$$

die Gleichungen:

$$D'' d + D d'' = o, \frac{\partial d}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} d'' = o, \frac{\partial d''}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} d = o,$$

welche durch die Substitutionen $d = S f''(u)$, $d' = \mp S f''(v)$ zu befriedigen sind, worauf sich nach den Formeln Bianchi pag. 308 die Weingarten'sche Verschiebungsfunktion zu $\varphi = \frac{\pm f'(u) \,.\, f'(v)}{S} = \text{Cotang}\ \omega$ bestimmt.

einer P- oder N-fläche angehört, je nachdem die Ausgangsfläche eine P- oder N-fläche ist. Punkt P hat nämlich die Koordinaten $x, y, z = f(x) \pm f(y)$; S dagegen

$$o, o, (f(x) - x f'(x)) \pm (f(y) - y f'(y)).$$

Somit entsprechen einem beliebigen Punkt P' von $P S$, wenn λ ein Parameter ist, die Koordinaten:

$$\xi = \frac{\lambda x}{1+\lambda}, \quad \eta = \frac{\lambda y}{1+\lambda}, \quad \zeta = \left(f(x) - \frac{x f'(x)}{1+\lambda}\right) \pm \left(f(y) - \frac{y f'(y)}{1+\lambda}\right).$$

Also ist $\overset{\lambda}{\underset{T}{P}}$ ein Punkt der T-fläche:

$$z = \left(f(x) - \frac{x f'(x)}{1+\lambda}\right) \pm \left(f(y) - \frac{y f'(y)}{1+\lambda}\right).$$

$\lambda = o$ gibt die eigentlichen T-flächen:

$$z = (f(x) - x f'(x)) \pm (f(y) - y f'(y)),$$

deren erzeugende Funktion:

$$T(u) = f(u) - u f'(u)$$

den Satz erkennen lässt: »Zu einer als P- oder N-fläche gegebenen T-fläche gehört eine Schar von P- oder N-flächen:

$$z = \left(Cx - x \int \frac{T(x)}{x^2} dx\right) \pm \left(Cy - y \int \frac{T(y)}{y^2} dy\right).$$

C) Weitere Formeln und Sätze, die sich auf die Geometrie der P- und N-flächen beziehen.

§ 1. Aus $f(x) + f(y) = f(x) - f(y)$ folgt zur Bestimmung des Schnittes einer P-fläche mit ihrer zugeordneten N-fläche die Gleichung

$$f(y) = o.$$

Die Schnitte bestehen also aus kongruenten zur xz-ebene parallelen ebenen Kurven, in deren Ebenen auch die Schnittkurven der Flächen $z = F(x) + f(y)$ und $z = F(x) - f(y)$ liegen.

Aus den Gleichungen der Tangentialebenen:

$$Z = f(x) \pm f(y) + (X - x) f' x \pm (Y - y) f'(y)$$

für die P- und N-flächen ergeben sich als Schnittlinien Gerade, die durch

$$Y f'(y) = y f'(y) - f(y)$$
$$Z = X f'(x) + f(x) - x f'(x)$$

definiert sind, welche also in Ebenen parallel zur xz-ebene liegen.

Durch Kombination der Normalengleichungen:

$$\xi = x - \frac{\varrho}{S} f'(x),\ \eta = y \mp \frac{\varrho}{S} f'(y),\ \zeta = f(x) \pm f(y) + \frac{\varrho}{S}$$

mit denen der entsprechenden Tangentialebenen findet man den Satz: »*Bei den P- und N-flächen sind die absoluten Längen der Normalen von den Flächenpunkten der einen Fläche bis zum Schnitt mit den Tangentialebenen der anderen Fläche, die zu gleichen xy-werten gehören, gleich.*«

§ 2. Der zwischen o und π gelegene Winkel ω der Parameterlinien ist für die P- und N-flächen beziehungsweise durch:

$$\underset{P}{\cos}\,\omega = \frac{f'(x)\,f'(y)}{R},\ \underset{N}{\cos}\,\omega = -\frac{f'(x)\,f'(y)}{R},$$

$$R = \sqrt{(1 + f'^2(x))\ (1 + f'^2(y))}$$

gegeben, so dass also folgt:

$$\text{I.}\quad \underset{P}{\omega} + \underset{N}{\omega} = \pi.$$

Die Formeln für die mittlere und totale Krümmung geben:

$$H = -\frac{f''(u)\,(1 + f'^2(v)) \pm f''(v)\,(1 + f'^2(u))}{S^3},\ K = \pm\frac{f''(u)\,f''(v)}{S^4}$$

$$\text{II.}\quad \underset{P}{K} + \underset{N}{K} = o$$

und wegen $\underset{P}{\sin}\,\omega = \underset{N}{\sin}\,\omega = \sin\omega$:

$$\text{III.}\quad \frac{1}{2}\sin^2\omega = \frac{\underset{P}{K} - \underset{N}{K}}{\underset{P}{H^2} - \underset{N}{H^2}}.$$

Setzt man von nun an einfach ω, K, etc., statt $\underset{P}{\omega}$, $\underset{P}{K}$, indem die betreffenden Formeln nur für die P-flächen abgeleitet sind, so findet man:

$$\zeta = -\frac{1}{K} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}$$

vermöge der Beziehungen:

$$\frac{\partial \cos\omega}{\partial u} = -\sin\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{\sqrt{E\,G}}\right),$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{1}{2\,S}\left(\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\right)$$

$$S \,.\, K = -\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{2S}\left(\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\right)\right\}.$$

Da andererseits

$$S \,.\, \mathrm{Sin}\, \nu = 1$$

ist, wo ν den Winkel der Flächennormalen mit der xy-ebene bedeutet, so lässt sich K durch ν und ω ausdrücken, nämlich:

$$\text{IV.} \quad K = -\mathrm{Sin}\, \nu \,.\, \frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v} = -\frac{1}{S}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v}.$$

Bei den früher angegebenen Werten von E, F, G kann man

$$ds^2 = E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2$$

in die Form:

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\,\mathrm{Cos}\,\omega\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2$$

bringen, wo also $F = \mathrm{Cos}\,\omega$, $S = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 - \mathrm{Cos}^2\omega} =$

$$= \mathrm{Sin}\,\omega \text{ wird.}$$

Alsdann geht Formel IV über in:

$$\text{VIII.} \quad K = -\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\omega} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta}.$$

Aus $K \,.\, S = -\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v}$ folgt für die Curvatura integra:

$$\text{IX.} \quad \int\int K\, d\sigma = \int\int K\, S\, du\, dv = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$$

wenn die $\sphericalangle\ \alpha$ die Innenwinkel des von den Parameterlinien gebildeten Vierecks sind. Die Curvatura integra ist somit dem negativen Exzess jenes Vierecks gleich. [1])

§ 3. Bezieht man auf ein Orthogonalsystem, so hat wegen $F_1 = o$ das Linienelement die Gleichung $ds^2 = E_1 d\varphi^2 + G_1 d\psi^2$, wo im Falle der Niveau- und Falllinien bei den P-flächen: $\varphi = f(u) + f(v)$, $\psi = \int \dfrac{du}{f'(u)} - \int \dfrac{dv}{f'(v)}$ ist.

Mittelst der Differentialparameter findet man;

$$E_1 = \frac{1}{\Delta_1 \varphi} = \frac{S^2}{S^2 - 1}, \quad G_1 = \frac{1}{\Delta_1 \psi} = \frac{F^2}{S^2 - 1},$$

[1]) Voss, Math. Annalen, Bd. 19, pag. 1 ff.

so dass wegen $F^2 = S^2 . \text{Cotang}^2\omega$ und $S . \text{Sin}\, \nu = 1$ geschrieben werden kann:

$$ds^2 = \frac{1}{\text{Cos}^2\nu} (d\varphi^2 + \text{Cotang}^2\omega\, d\psi^2).$$

Für spätere Anwendungen wichtiger ist das nachfolgend behandelte Orthogonalsystem: Bedeutet $\Delta(\varphi, \psi)$ den gemischten Differentialparameter (Bianchi § 36), so ist die Orthogonalitätsbedingung für neu einzuführende Parameterlinien φ, ψ die Gleichung $\Delta(\varphi, \psi) = o$ oder:

$$E \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + G \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\psi}{\partial u} = o,$$

die erfüllt wird durch:

$$\varphi = \Phi(\xi(u) + \xi(v)), \quad \psi = \Phi(\xi(u) - \xi(v)),$$

wenn man ξ bestimmen kann aus:

$$E\, \xi'^2(v) = G\, \xi'^2(u).$$

Im vorliegenden Fall ist dies leicht zu erreichen durch:

$$\xi(u) = \int du \sqrt{1 + f'^2(u)}, \quad \xi(v) = \int dv \sqrt{1 + f'^2(v)},$$

so dass

$$\int du \sqrt{1 + f'^2(u)} \pm \int dv \sqrt{1 + f'^2(v)} = C$$

für die P-flächen das fragliche Orthogonalsystem wird, aber auch für die N-flächen, da der Koefficient von $\mp F$ in obiger Differentialgleichung verschwindet. Dieses Orthogonalsystem ist besonders ausgezeichnet als System der Diagonalkurven der u, v-kurven, die als Parameterlinien von Translationsflächen nach Voss äquidistante Kurven sind. (Math. Annalen Bd. 19, pag. 1 ff.) Diesen Namen führen nach Voss Kurven dann, wenn auf sie bezogen das Linienelement die Form hat:

$$ds^2 = du^2 + 2 F_1\, du\, dv + dv^2,$$

wo $F_1 = \text{Cos}\, \omega$ ist. Da man deswegen auch:

$$ds^2 = d(u + v)^2 \frac{1 + \text{Cos}\, \omega}{2} + d(u - v)^2 \frac{1 - \text{Cos}\, \omega}{2}$$

schreiben kann und im vorgelegten Fall

$$u = \int du \sqrt{1 + f'^2(u)},\ v = \int dv \sqrt{1 + f'^2(v)}$$

ist, so erhält man die bemerkenswerte Form:

$$ds^2 = \mathrm{Cos}^2 \frac{\omega}{2} \cdot d\varphi^2 + \mathrm{Sin}^2 \frac{\omega}{2} d\psi^2,$$

indem die Kurven $\varphi = C$, $\psi = C$ jenes oben bestimmte Orthogonalsystem bilden. Wegen

$$\frac{1}{\varrho_\varphi} = -\frac{1}{\mathrm{Sin}\frac{\omega}{2} \cdot \mathrm{Cos}\frac{\omega}{2}} \cdot \frac{\partial(\mathrm{Sin}\frac{\omega}{2})}{\partial\varphi},$$

$$\frac{1}{\varrho_\psi} = -\frac{1}{\mathrm{Sin}\frac{\omega}{2} \cdot \mathrm{Cos}\frac{\omega}{2}} \cdot \frac{\partial(\mathrm{Cos}\frac{\omega}{2})}{\partial\psi}$$

erhält man die Beziehung:

$$(\tfrac{1}{2}\varrho_\varphi \frac{\partial\omega}{\partial\varphi})^2 + (\tfrac{1}{2}\varrho_\psi \frac{\partial\omega}{\partial\psi})^2 = 1.$$

§ 4. Bemerkenswert ist ein mit den P- und N-flächen im Zusammenhang stehendes Strahlensystem, welches als Normalenkongruenz aufgefasst, eine leicht bestimmbare Orthogonalflächenschar besitzt. Ein Strahl durch einen Punkt u, v der Ausgangsflächen mit dem durch

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

gegebenen Linienelement habe die Richtungskoefficienten X, Y, Z und bilde mit $v = C$, $u = C$ bezw. die Winkel α und β, dann ist:

$$\mathrm{Cos}\,\alpha = \Sigma \frac{X}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(u)}} (X + Z f'(u));$$

$$\mathrm{Cos}\,\beta = \Sigma \frac{X}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(v)}} (Y \pm Z f'(v)).$$

Dieses Strahlensystem ist eine Normalenkongruenz unter der Bedingung:

$$\frac{\partial(\sqrt{E}.\,\mathrm{Cos}\,\alpha)}{\partial v} = \frac{\partial(\sqrt{G}\,\mathrm{Cos}\,\beta)}{\partial u},$$

die im vorliegenden Fall befriedigt werden kann durch:

$$\text{Cos}\,\alpha = \int dv\,\sqrt{1+f'^2(v)},\ \text{Cos}\,\beta = \int du\,\sqrt{1+f'^2(u)}.$$

Die das Strahlensystem bestimmenden Richtungskoeffi-cienten ergeben sich aus:

$$X + Zf'(u) = \sqrt{1+f'^2(u)}\int dv\,\sqrt{1+f'^2(v)},$$

$$Y \pm Zf'(v) = \sqrt{1+f'^2(v)}\int du\,\sqrt{1+f'^2(u)},$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

so dass die zugehörigen Orthogonalflächen, wenn man

$$t = C - \int (\sqrt{E}\,\text{Cos}\,\alpha\,du + \sqrt{G}\,\text{Cos}\,\beta\,dv) =$$

$$= C - 2\cdot\int du\,\sqrt{1+f'^2(u)}\cdot\int dv\,\sqrt{1+f'^2(v)}$$

setzt, in der Form auftreten:

$$\xi = u + X\cdot t,\ \eta = v + Y\cdot t,\ \zeta = (f(u) \pm f(v)) + Z\cdot t.$$

D) Magnus'sche Funktionalgleichungen.

Die in der Einleitung angedeuteten Funktionalgleichungen, welche späterhin eine bemerkenswerte Rolle spielen, haben die symmetrische Form:

$$\text{I.}\quad \sum_{1}^{n}{}_i\,\varphi(x)\,\psi(y) = \sum_{1}^{n}{}_i\,\varphi(y)\cdot\psi(x).$$

Dieselben sind von L. Magnus behandelt worden,[1]) mit dem Resultat, dass eine solche Gleichung äquivalent ist mit dem Linearsystem:

$$\psi(x) = c\,\varphi(x) + \ldots. + c\,\varphi(x),\ \ (i = 1, 2, \ldots. n),$$

wobei übrigens $c = c$ zu setzen ist.

Die von Magnus zur Lösung der Gleichung I angegebene Methode wird mit Vorteil durch das auch für die allgemeinere Gleichung:

[1]) Crelle's Journal 5. Bd. „Ueber die Funktionen, die der Gleichung: $F_1(y)\cdot\varphi_1(x) + F_2(y)\cdot\varphi_2(x) + \ldots. + F(y)\cdot\varphi(x) = F_1(x)\cdot\varphi_1(y) + F_2(x)\cdot\varphi_2(y) + \ldots. + F(x)\cdot\varphi(y)$ genugthun."

II. $F(\underset{1}{\varphi}(x)\cdot\underset{1}{\psi}(y),\ \ldots.\ \underset{n}{\varphi}(x)\cdot\underset{n}{\psi}(y)) = F(\underset{1}{\varphi}(y)\cdot\underset{1}{\psi}(x),\ \ldots.\ \underset{n}{\varphi}(y)\cdot\underset{n}{\psi}(x))$

giltige Verfahren ersetzt:

Die Gleichung II ist gelöst, wenn bei vorgegebener Funktion F die Funktionen $\underset{i}{\varphi}$ und $\underset{i}{\psi}$ so bestimmt sind, dass die Funktionalgleichung II identisch erfüllt wird, dass also speziell die eine Seite derselben von selbst eine symmetrische Funktion der Variablen wird. Da letztere von einander unabhängig sind, so ist nach Bestimmung von $\underset{i}{\varphi}$ und $\underset{i}{\psi}$ die Gleichung II eine Identität, was man auch für x und y setzen mag. Setzt man also der Reihe nach $y = \alpha_1, \alpha_2 \ldots. \alpha_n$, so erhält man n Identitäten oder umgekehrt, wenn die Funktionen $\underset{i}{\varphi}$ und $\underset{i}{\psi}$ noch unbekannt sind, aus diesen n Gleichungen die Funktionen $\underset{i}{\varphi}$, ausgedrückt durch die $\underset{i}{\psi}$ und gewisse Konstanten, die teilweise von einander abhängen werden.

Man wird zunächst die Konstanten

$$\underset{k}{a} = \underset{1}{\psi}(\alpha)_k,\ \underset{k}{b} = \underset{2}{\psi}(\alpha)_k \ldots.,\ \underset{k}{n} = \underset{n}{\psi}(\alpha)_k$$

willkürlich lassen, aus den n Gleichungen:

$$\underset{i}{\varphi}(x) = \underset{i}{f}(\underset{1}{\psi}(x) \ldots. \underset{n}{\psi}(x),\ \underset{1}{a},\ \ldots.\ \underset{k}{a},\ \ldots.\ \underset{1}{n},\ \ldots.\ \underset{k}{n})$$

die Form der Funktionen $\underset{i}{\varphi}$ bestimmen und die Konstanten so regulieren, dass nach Einsetzung von $\underset{i}{\varphi}(x)$ und $\underset{i}{\varphi}(y)$ in die eine Seite der Gleichung II, diese Seite eine symmetrische Funktion der Variablen wird.

Nach diesem Schema entnimmt man der Magnus'schen Gleichung:

$$\sum_{1}^{n} \underset{i}{\varphi}(x)\cdot\underset{i}{\psi}(y) = \sum_{1}^{n} \underset{i}{\varphi}(y)\underset{i}{\psi}(x)$$

die Beziehungen:

$$\underset{1}{\varphi}(x) = \underset{1}{A}\,\underset{1}{\psi}(x) + \ldots. \underset{n}{A}\,\underset{n}{\psi}(x),\ \ldots.\ \underset{n}{\varphi}(x) = \underset{1}{N}\psi(x) + \ldots. \underset{n}{N}\underset{n}{\psi}(x).$$

Damit hierauf der Ausdruck:

$$\psi_1(y)\,(A_{11}\psi(x) + \ldots A_{nn}\psi(x)) + \psi_2(y)\,(B_{11}\psi(x) + \ldots B_{nn}\psi(x)) +$$
$$+ \ldots + \psi_n(y)\,(N_{11}\psi(x) + \ldots N_{nn}\psi(x))$$

eine symmetrische Funktion wird, kann man

$$A_1 = c_{11},\ B_2 = c_{22},\ \ldots N_n = c_{nn}$$

beliebig lassen, während man $A_2 = B_1$ oder mit anderer Bezeichnung $c_{12} = c_{21}$ etc., allgemein $c_{ik} = c_{ki}$ setzen muss. Willkürlich sind also nicht n^2, sondern nur $\frac{n(n+1)}{2}$ Konstante.

Bei allen Problemen, bei denen es sich um die Bestimmung der Flächen $z = f(x) \pm f(y)$ aus angenommenen Eigenschaften handelt, ist die eine Funktion f disponibel, welche samt gewissen Ableitungen in die betreffende Funktionalgleichung eingehen kann. Ist diese, wie in den meisten Fällen, eine Magnus'sche, so ersieht man aus dem einer solchen Gleichung äquivalenten Linearsystem, dass (mit Ausnahme des Spezialfalles, wo von vornherein eine direkte Trennung der Variablen möglich ist), solche Probleme im allgemeinen keine Lösung zulassen, da dann das Linearsystem mindestens aus zwei Gleichungen besteht, welche Differentialgleichungen für ein und dieselbe Funktion f sind. Eine Lösung des Problems ist in diesem Falle nur dann zu erwarten, wenn sich jene Differentialgleichungen von selbst aufeinander reduzieren, was durch passende Bestimmung der Konstanten c_{ik} zuweilen erreicht werden kann. Die Aussicht auf Erfolg wird dabei freilich um so geringer, aus je mehr Gleichungen das Linearsystem besteht. — Ein Beispiel wird diese Verhältnisse illustrieren: Die Funktionalgleichung

$$I\, f(x)\cdot f'(y) + f(y) = f(y)\cdot f'(x) + f(x)$$

giebt das Linearsystem:

$$f(x) = c_{11} f'(x) + c_{12} f(x)$$
$$1 = c_{21} f'(x) + c_{22} f(x).$$

Diese beiden Gleichungen stimmen für $c_{11} = 0,\ c_{12} = 1$ zu-

sammen und geben ($-c_{22} = c$ gesetzt) vermöge $f'(x) - 1 = c f(x)$ die Lösung:

$$\mathrm{I}' \cdot f(x) = n \cdot c^{cx} + \frac{1}{c}.$$

Die gegebene Funktionalgleichung konnte aber auch nach den Variablen getrennt werden, so dass sich aus

$$\frac{f'(x) - 1}{f(x)} = \frac{f'(y) - 1}{f(y)}$$

ebenfalls Lösung I′ ergiebt.

Setzt man das gefundene Resultat etwa in die linke Seite der gegebenen Gleichung I ein, so muss eine nach x und y symmetrische Funktion resultieren:

$$\left(n e^{cx} - \frac{1}{c}\right) \cdot n c e^{cy} + n e^{cy} + \frac{1}{c} = \frac{1}{c} + n^2 c e^{c(x+y)}.$$

II. Teil.

Bestimmung spezieller P- und N-flächen aus angenommenen Eigenschaften.

§ 1. Fläche der Liouville'schen Klasse.

Bekanntlich sind die Kurven $\psi = C$ geodätische Linien für:

$$ds^2 = E_1\, d\varphi^2 + G_1\, d\psi^2,\ E_1 = \chi(\varphi).$$

Um nun die P-flächen zu finden, auf denen die Kurven:

$$\psi = \int du\, \sqrt{1+f'^2(u)} - \int dv\, \sqrt{1+f'^2(v)} = C$$

geodätische Linien sind, hat man wegen

$$ds^2 = \mathrm{Cos}^2\frac{\omega}{2} d\varphi^2 + \mathrm{Sin}^2\frac{\omega}{2} d\psi^2,\ \mathrm{Cos}^2\frac{\omega}{2} = \chi(\varphi):$$

$$1 + \frac{f'(u).f'(v)}{\sqrt{(1+f'^2(u))\,(1+f'^2(v))}} =$$

$$= 2\,\chi\Big(\int du\, \sqrt{1+f'^2(u)} + \int dv\, \sqrt{1+f'^2(v)}\Big).$$

Durch partielle Differentiation nach u und v und Elimination von χ' findet man eine durch Trennung der Variablen zu lösende Funktionalgleichung, aus der man entnimmt:

$$\frac{f''(u)}{f'(u)\sqrt{(1+f'^2(u))^3}} = a = \frac{f''(v)}{f'(v)\sqrt{(1+f'^2(v))^3}}$$

Hieraus erhält man durch die Substitution $f'(u) = \mathrm{tang}\ \vartheta$, $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{(1+f'^2(u))}}$:

$$\mathrm{Cos}\,\vartheta + \log \mathrm{tang}\frac{\vartheta}{2} = a'u + b' = \lambda + {}^1\!/_2 \log\frac{1-\lambda}{1+\lambda}.$$

Durch die Entwicklung des log findet man:

$$au + b = R(\lambda) = \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^5}{5} + \frac{\lambda^7}{7} + \ldots,\ R(\lambda) = \lambda^2 + \lambda^4 + \lambda^6 +$$

$$+ \ldots = \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}.$$

Also ist:

$$R(\lambda) = \int_0^{\lambda} \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\, d\lambda = \int_0^{\lambda} \frac{\lambda^2\, d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)\,(1-k^2\lambda^2)}} =$$

$$= \int_0^{\xi} \frac{\mathrm{Sin}^2\zeta\, d\zeta}{\Delta(\zeta, k)}, \text{ (Modul} = \pm 1).$$

Für die Umkehrfunktion $\lambda = w(u)$ von $R(\lambda) = u$ findet man durch Differentiation von

$$u = \int_0^{\lambda} \frac{\lambda^2\, d\lambda}{1-\lambda^2} \text{ die Differentialgleichung:}$$

$$w'(u) \cdot w^2(u) = 1 - w^2(u)$$

Aus der Konvergenz von $R(\lambda) = u$ für $\lambda < 1$ ersieht man, dass es für $w(u)$ eine in der Umgebung von $u = o$ konvergente Potenzreihe giebt. Setzt man nämlich:

$$\frac{u}{a_3} = 3u = z,$$

so muss dieselbe die Form haben:

$$\lambda = \varphi(z) = z^{1/3} + a_2 z^{2/3} + a_3 z + a_4 z^{4/3} + \ldots,$$

$\varphi(z)$ ist in der Nähe von $z = o$ dreideutig. Von den Koefficienten a sind die mit geradem Index alle $= o$, da $\varphi(z)$ und $w(u)$ ungerade Funktionen sind. Die Bestimmung der übrigen Koefficienten auf Grund der Differentialgleichung:

$$3\,\varphi'(z) \cdot \varphi^2(z) = 1 - \varphi^2(z)$$

ergiebt: $a_3 = -\frac{1}{5}$, $a_5 = \frac{3}{7 \cdot 5^2}$, $a_7 = \frac{-17}{3 \cdot 7 \cdot 5^3}$ etc.

Wegen $\lambda = w(u) = \frac{1}{\sqrt{(1+f'^2 u)}}$ erhält man

$$f(u) = \int \frac{du}{w(u)} \cdot \sqrt{1 - w^2(u)} = \sqrt{1 - w^2(u)},$$

da man setzen kann:

$$du = \frac{d\, w(u)}{w'(u)} = \frac{w^2(u) \cdot d\, w(u)}{1 - w^2(u)}.$$

Die so erhaltene Fläche:

$$z = \sqrt{(1 - w^2(x))} + \sqrt{(1 - w^2(y))}$$

hat, wenn man $\sqrt{1 - w^2(x)} = \xi$, $\sqrt{1 - w^2(y)} = \eta$ setzt, die Parameterform:

$$x = \sqrt{1 - \xi^2} + \frac{1}{2} \log \frac{1 - \sqrt{1 - \xi^2}}{1 + \sqrt{1 - \xi^2}}, \quad y = \sqrt{1 - \eta^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \log \frac{1 - \sqrt{1 - \eta^2}}{1 - \sqrt{1 - \eta^2}}, \quad z = \xi + \eta.$$

Die oben definierte Schar:

$$\int du \sqrt{1 + f'^2(u)} - \int dv \sqrt{1 + f'^2(v)} = C$$

von geodätischen Linien wird nun:

$$\frac{1 - w^2(u)}{1 - w^2(v)} = C.$$

Führt man die Funktion w in die Bedingungsgleichung: $\mathrm{Cos}^2 \frac{\omega}{2} = \chi(\varphi)$ ein, so offenbart sich die Natur der Funktion χ als:

$$\chi(t) = {}^1/_2 \left(1 + e^{-t}\right).$$

Nun erhält man weiter:

$$ds^2 = \mathrm{Cos}^2 \frac{\omega}{2} d\varphi^2 + \mathrm{Sin}^2 \frac{\omega}{2} d\psi^2 = \chi(\varphi) d\varphi^2 + (1 - \chi(\varphi)) d\psi^2 =$$

$$= (1 - \chi(\varphi)) \left(\frac{\chi(\varphi)}{1 - \chi(\varphi)} d\varphi^2 + d\psi^2 \right) = A (d\Phi^2 + d\Psi^2),$$

wenn man $1 - \chi(\varphi) = A$, $\psi = \Psi$, $\int d\varphi \sqrt{\frac{e^{\varphi} + 1}{e^{\varphi} - 1}} = \Phi$ setzt.

Also: »*Die Kurven*

$$\Psi = \log \frac{\sqrt{e^{\varphi} + 1} + \sqrt{e^{\varphi} - 1}}{\sqrt{e^{\varphi} + 1} - \sqrt{e^{\varphi} - 1}} - 2 \arctan \sqrt{\frac{e^{\varphi} + 1}{e^{\varphi} - 1}} = C \text{ und}$$

$\Psi = \omega = C$ *sind Isothermen*[1]), *sodass durch* $\xi = \Phi$, $\eta = \Psi$ *die Fläche auf eine* $\xi\eta$*-ebene conform abgebildet ist.*«

Da aus $A = 1 - \chi(\varphi)$, $\Phi = \int d\varphi \sqrt{\frac{e^{\varphi}+1}{e^{\varphi}-1}}$ durch Elimination von φ:

$$A = \alpha(\Phi)$$

folgt, so hat man:

$$ds^2 = \alpha(\Phi)\,(d\Phi^2 + d\Psi^2),$$

d. h. einen Spezialfall von:

$$ds^2 = (\alpha(\Phi) + \beta(\Psi))\,(d\Phi^2 + d\Psi^2).$$

»*Die Fläche* $z = \sqrt{1 - w^2(x)} + \sqrt{1 - w^2(y)}$ *gehört somit zur Klasse der Liouville'schen Flächen.*«

Die vollständige Gleichung der geodätischen Linien in endlicher Form folgt nun aus dem bekannten Satz: »Ist von der Differentialgleichung $\Delta_1 \vartheta = 1$ eine Lösung ϑ mit einer wesentlichen Konstanten a bekannt, so findet man die endliche Gleichung der geodätischen Linien aus $\frac{\partial \vartheta}{\partial a} = b$, wenn b eine zweite willkürliche Konstante ist.«

Unter Zugrundelegung von $ds^2 = \alpha(\Phi)\ (d\Phi^2 + d\Psi^2)$ ist deshalb

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \Psi}\right)^2 = \alpha(\Phi) \text{ und die Lösung:}$$

$$\vartheta = \int d\Phi \sqrt{\alpha(\Phi) - a} + \Psi \cdot \sqrt{a}.$$

Die gesuchte endliche Gleichung der geodätischen Linien wird somit:

$$2\,\frac{\partial \vartheta}{\partial a} = b = \int \frac{d\Phi}{\sqrt{\alpha(\Phi) - a}} - \Psi \frac{\sqrt{a}}{a'}.$$

Für $U = \int d\Phi \sqrt{\alpha(\Phi)}$, $r = \sqrt{\alpha(\Phi)}$ oder $\varphi = \gamma(r)$ und $\Psi = \omega$ erhält man endlich:

$$ds^2 = dU^2 + r^2\, d\omega^2$$

---

[1]) Dabei bedeutet: $\varphi = (1 - w^2(u)) \cdot (1 - w^2(v))$, $\psi = \frac{1 - w^2(u)}{1 - w^2(v)}$.

d. h. »*Die Fläche* $z = \sqrt{1 - w^2(x)} + \sqrt{1 - w^2(y)}$ *ist auf die Rotationsfläche*

$$x = r \operatorname{Cos} \omega, \; y = r \operatorname{Sin} \omega, \; z = \sigma(r)$$

abwickelbar, wobei $\sigma(r) = \int dr \sqrt{r^2 \gamma'^2(r) - 1}$ *sich ergiebt aus:*

$$U = \int r \gamma'(r) dr = \int dr \sqrt{1 + \sigma'^2(r)}.$$

§ 2. Rotationsfläche.

Die partielle Differentialgleichung der Rotationsflächen mit der z-axe als Drehaxe

$$qx - py = o$$

wird für die P-flächen:

$$x \cdot f'(y) - y f'(x) = o.$$

Soll die Gerade $\xi = m\zeta + \mu, \; \eta = n\zeta + \nu$ Axe sein, so bekommt man aus:

$$(q + n)\,(x + pz - \mu) - (p + m)\,(y + qz - \nu) = o$$

für $n = m, \; \nu = \mu$ allein die Magnus'sche Funktionalgleichung:

$$(x - \mu)\, f'(y) + (mx + mf(x) \cdot f'(x)) + mf'(x) \cdot f(y) =$$
$$(y - \mu)\, f'(x) + (my + mf(y) \cdot f'(y)) + mf'(y) \cdot f(x)$$

mit dem Linearsystem:

$$x - \mu = c_{11} f'(x) + c_{12} + c_{13} f(x)$$
$$m(x + f(x) \cdot f'(x)) = c_{21} f'(x) + c_{22} + c_{23} f(x)$$
$$mf'(x) = c_{31} f'(x) + c_{32} + c_{33} f(x).$$

Damit diese Gleichungen zusammenstimmen, muss man $m = o$ und folglich auch $c_{12} = c_{22} = c_{23} = c_{33} = o$ setzen, so dass dann wieder der einfache Fall

$$f(x) = ax^2 + b$$

resultiert. D. h. »*Unter allen P-flächen ist das Rotationsparaboloid die einzige Rotationsfläche.*«

§ 3. Regelfläche.

Setzt man in bekannter Weise:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \; dp = r\,dx + s\,dy, \; dq = s\,dx + t\,dy,$$
$$dr = u\,dx + v\,dy, \; ds = v\,dx + w\,dy, \; dt = w\,dx + \omega\,dy$$

$$M = \frac{1}{t}(-s + \sqrt{s^2 - rt}),$$

so wird bekanntlich die partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für die Linienflächen:

$$u + 3\,v\,M + 3\,w\,M^2 + \omega\,M^3 = o.$$

Die Einführung von $z = f(x) - f(y)$ giebt hier nach Trennung der Variablen:

$$\frac{f'''(x)}{\sqrt{f'''^3(x)}} = a' = \frac{f'''(y)}{\sqrt{f'''^3(y)}},$$

d. h. im Falle $a' = o$ das hyperbolische Paraboloid, im allgemeinen Fall:

$$z = a \log \frac{y+b}{x+b} + c\,(y - x).\ ^1)$$

Da auf jeder Linienfläche die Erzeugenden das eine Haupttangentenkurvensystem bilden, kann man die Geradenschar der Fläche leicht finden.

Die Projektionen der beiden Scharen von Asymptotenlinien sind nämlich:

$$(x+b)\cdot(y+b) = D,\ y+b = C(x+b).$$

Für die zweite und dritte Projektion der letzteren gelten die Gleichungen:

$$z = cx\,(C-1) + [bc\,(C-1) + a \log C],$$

$$z = cy\,\frac{C-1}{C} + [bc\,\frac{C-1}{C} + a \log C].$$

$$\text{Aus } \frac{dz}{dx} = \frac{\operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Cos}\alpha} = c\cdot(C-1),\ \frac{dz}{dy} = \frac{\operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Cos}\beta} = c\,\frac{C-1}{C},$$

$$\operatorname{Cos}^2\alpha + \operatorname{Cos}^2\beta + \operatorname{Cos}^2\gamma = 1$$

erhält man also für die gesuchten Geraden die Richtungen vermöge:

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{1}{N},\ \operatorname{Cos}\beta = \frac{C}{N},\ \operatorname{Cos}\gamma = \frac{c\,(C-1)}{N},$$

$$N = \pm\sqrt{1 + C^2 + c^2\,(C-1)^2}.$$

Die Striktionslinie der gegeben Linienfläche liefert der Satz: »Die Striktionslinie ist der Ort der Punkte, in denen

---

[1]) Für $b = o$, $c = o$ wird die Fläche ein Conoid mit der z-Axe als Leitlinie.

die geodätische Krümmung der Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden Null ist.«

Für die Erzeugenden ist ($x = u$, $y = v$ gesetzt) die Differentialgleichung:

$$P\,du + Q\,dv = \frac{du}{u+b} - \frac{dv}{v+b} = o.$$

Die Fundamentalgrössen werden:

$$E = 1 + \left(c + \frac{a}{u+b}\right)^2, \quad G = 1 + \left(c + \frac{a}{v+b}\right)^2.$$

$$F = -\left(c + \frac{a}{u+b}\right)\left(c + \frac{a}{v+b}\right).$$

so dass die Differentialgleichung der zu $P\,du + Q\,dv = o$ orthogonalen Trajektorien:

$$(EQ - FP)\,du + (FQ - GP)\,dv = o$$

als Bedingung, dass die durch sie definierten Kurven die geodätische Krümmung Null haben, die Gleichung liefert:

$$\varphi(u, v) = 0 =$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{F(FQ - PG) - G(EQ - FP)}{\sqrt{[E(FQ - GP)^2 - 2F(EQ - FP)(FQ - GP) + G(EQ - FP)^2]}}\right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{F(EQ - FP) - E(FQ - PG)}{\sqrt{[E(FQ - GP)^2 - 2F(EQ - FP)(FQ - GP) + G(EQ - FP)^2]}}\right\};$$

d. h. »*Die Striktionslinie der gegebenen Linienfläche kann durch Differentiation gefunden werden.*«

§ 4. Minimalfläche.

Die Differentialgleichung:

$$r(1 + q^2) - 2pq\,s + t(1 + p^2) = 0$$

für die Minimalflächen liefert für die N-flächen:

$$\frac{f''(x)}{1 + f'^2(x)} = a = \frac{f''(y)}{1 + f'^2(y)}.$$

$$z = \frac{1}{a} \log \frac{\mathrm{Cos}\,(ay + b)}{\mathrm{Cos}\,(ax + b)}. \quad \text{(Scherk'sche Fläche.)}$$

§ 5. Fläche dritter Ordnung.

Um die N-fläche zu finden, deren T-fläche mit der N^2-fläche identisch ist, hat man $f^2(x) \quad f(x) - xf'(x)$ zu integrieren und erhält so die Fläche:

$$z = \frac{ax}{1+ax} - \frac{ay}{1+ay}.$$

Man kann also nach den früheren Bemerkungen über T- und N²-fläche die Fläche 5. Ordnung $z = \frac{a^2x^2}{(1+ax)^2} - \frac{a^2y^2}{(1+ay)^2}$ in doppelter Weise aus Flächen dritter Ordnung ableiten.

Die Gleichung der erhaltenen Fläche dritter Ordnung stellt, wenn sich a parametrisch ändert, eine Flächenschar vor, deren Enveloppe aus den zwei Mänteln:

$$z_1 = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

besteht. Wie die beiden Mäntel auseinander hervorgehen, zeigt die Relation $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Die erhaltene Fläche dritter Ordnung

$$z(1+ax)(1+ay) = a(x-y)$$

kann übrigens durch projektive Zuordnung des Ebenenbüschels

$$z + \lambda(x-y) = 0,$$

dessen Axe die Flächengrade $z = o$, $y = x$ ist, und des Cylinderbüschels zweiter Ordnung

$$a + \lambda(1+ax)(1+ay) = 0,$$

dessen Erzeugende der z-Axe parallel laufen, erzeugt werden.

Durch die lineare Substitution

$$X = 1 + ax, \quad Y = 1 + ay$$

erhält man für die Falllinien der Fläche die bemerkenswerte Form

$$X^3 + Y^3 = c^3,$$

so dass diese Kurven der xy-Ebene die Parameterdarstellung:

$$X = c \cdot \mathrm{Cos}^{2/3}\vartheta, \quad Y = c \cdot \mathrm{Sin}^{2/3}\vartheta$$

zulassen, während

$$\xi \,\mathrm{Cos}^{4/3}\vartheta_0 + \eta \,\mathrm{Sin}^{4/3}\vartheta_0 = c$$

die Gleichung der Tangente in einem Punkt ϑ_0 ist.

Aehnliche Parameterdarstellungen leistet dieselbe lineare Substitution für die eine Schar der Asymptotenlinien bezw. Kurven der isoklinen Normalen.

Im ersten Fall hat man:

$$\frac{1}{\sqrt{X}} + \frac{1}{\sqrt{Y}} = C;\ X = c\,\mathrm{Cos}^{-4}\vartheta,\ Y = c\,\mathrm{Sin}^{-4}\vartheta,\ \text{für}\ C = c^{-1/2},$$

im zweiten Fall:

$$\frac{1}{X^4} + \frac{1}{Y^4} = \left(\frac{\mathrm{Cotang}\,\nu_0}{a}\right)^2;\ X = c\,\mathrm{Cos}^{-1/2}\vartheta,\ Y = c\,\mathrm{Sin}^{-1/2}\vartheta,$$

$$\text{für Cotang}\ \nu_0 = ac^{-2}.$$

§ 6. Interscendente Flächen.

Die zu den Flächen $z = f(x) \pm f(y)$ gehörigen T-flächen erster Art hatten die erzeugende Funktion

$$T_1(x) = f(x) - x f'(x).$$

Bildet man mit demselben Operationssymbol $F(\sigma) - \sigma F'(\sigma)$, die iterierten T-flächen, so erhält man der Reihe nach:

$T_2(x) = T_1(x) - x T_1'(x) = f(x) - x f'(x) + x^2 f''(x)$

$T_3(x) = T_2(x) - x T_2'(x) = f(x) - x f'(x) \qquad - x^3 f'''(x)$ etc.

die erzeugende Funktion $\underset{n}{T}(x)$ der T-fläche n Art wird somit von der Form:

$$\underset{n}{T}(x) = f(x) + a_1 x f'(x) + a_2 x^2 f''(x) + \ldots + \underset{n}{a}\, x^n f^{(n)}(x).$$

Soll nun die Ausgangsfläche mit ihrer T-fläche $\underset{n}{T}$ zusammenfallen, so erhält man aus $f(x) = \underset{n}{T}(x)$ die lineare Differentialgleichung:

$$\sum_1^n \underset{i}{a}\, x^i f^{(i)}(x) = 0,$$

zu welcher man mittelst $f(x) = x^{\lambda}$ als Charakteristik eine Gleichung

$$\underset{1}{a}\,\lambda + \underset{2}{a}\,\lambda(\lambda - 1) + \ldots \underset{n}{a}\,\lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - (n-1)) = 0$$

vom n. Grad bekommt. Indem dieselbe n partikuläre Lösungen liefert (die nicht alle reell sein werden), ist auch die allgemeine Lösung bekannt und heisst

$$f(x) = \underset{1}{C} x^{o} + \underset{2}{C} x^{\lambda_2} + \ldots \underset{n}{C} x^{\lambda_n}.$$

Imaginäre Partikularlösungen der Charakteristik kann man durch Nullsetzen der entsprechenden Konstanten C ausschliessen, wobei man dann freilich auf die allgemeinste Lösung verzichtet.

Die Verallgemeinerung des Problems würde verlangen, dass die Ordinaten der T-flächen ganzzahlige Vielfache p von denen der Ausgangsflächen werden. Z. B. $pf(x) = T_1(x)$ giebt $f(x) = a x^{1-p}$,

$pf(x) = T_2(x)$ giebt $f(x) = C_1 x^{1+\sqrt{p}} + C_2 x^{1-\sqrt{p}}$, also

$$z = (C_1 x^{1+\sqrt{p}} + C_2 x^{1-\sqrt{p}}) \pm (C_1 y^{1+\sqrt{p}} + C_2 y^{1-\sqrt{p}}).$$

Ebenso wird man durch $pf(x) = T(x)$ auf einen analogen Fall interscendenter Flächen geführt.[1])

§ 7. P- und N-fläche mit dem Charakteristikum $\frac{K_P - K_N}{(W_P^2 - W_N^2)^2} = 1$

Versteht man unter W den Abstand der Tangentialebene vom Ursprung, so folgt aus:

$S \cdot W_{P,N} = (f(x) - x f'(x)) \pm (f(y) - y f'(y))$ wegen:

$S^2 \cdot (W_P^2 - W_N^2) = 4 (f(x) - x f'(x)) (f(y) - y f'(y))$ und

$S^4 (K_P - K_N) = 2 f''(x) \cdot f''(y)$ die Relation:

$$\frac{K_P - K_N}{(W_P^2 - W_N^2)^2} = 1,$$

wenn die Funktionalgleichung:

$$f''(x) \cdot f''(y) = 8 (f(x) - x f'(x))^2 \cdot (f(y) - y f'(y))^2$$

erfüllt wird, was durch die Funktion f geschieht, welche das Intregal ist von der Differentialgleichung:

$$f''(x) = \lambda (f(x) - x f'(x))^2, \quad (\lambda = \pm \sqrt{8}).$$

Zu der partikulären Lösung $f(x) = \frac{2}{3 \lambda x^2}$ derselben gehören die Flächen:

$$z_{P,N} = \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{6} \left(\frac{1}{x^2} \pm \frac{1}{y^2} \right),$$

[1]) Interscendent heissen nach Leibnitz Kurven oder Flächen dann, wenn die Variablen in die Gleichung als Dignanden von Potenzen eingehen, deren Exponenten Irrationalzahlen sind.

wo $\varepsilon = \pm 1$ sein kann. Um die allgemeine Lösung der Gleichung:

$$U = f''(x) - \lambda (f(x) - x f'(x))^2 = 0$$

zu finden, kann man durch Elimination von $f(x) - x f'(x)$ aus $U = o$ und

$$U_1 = f'''(x) + 2\lambda x f''(x)\ (f(x) - x f'(x)) = 0$$

die Kombinationsgleichung:

$$V_1 = f'''(x) + 2x\sqrt{\lambda f''^3(x)} = 0$$

bilden, von der man sofort ein erstes Integral

$$V = 0 = \frac{1}{f''(x)} - \lambda^2 \left(\frac{x^2}{2} + a\right)^2$$

kennt. Durch Elimination von $f''(x)$ aus $U = o$, $V = o$ erhält man

$$(f(x) - x f'(x))(x^2 + a) = \frac{2}{\sqrt{\lambda^3}}.$$

$$f(x) = \frac{2}{a\sqrt{\lambda^3}} + x\left\{b + \frac{2}{\sqrt{(a\lambda)^3}} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right\}.$$

Die Flächen fünfter Ordnung

$$z = a\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$$

haben offenbar die Symmetrieebenen $x = o$, $y = o$, $y = -x$ und zwar $x = o$, $y = o$ als Asymptotenebenen, während die Flächen

$$z = a\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)$$

nur die Symmetrieebenen $x = o$ $y = o$ haben und die Geraden $y = \pm x$, $z = o$ enthalten. Die Projektionen für die Falllinien der Flächen $z = a\left(\frac{1}{x^2} \pm \frac{1}{y^2}\right)$ sind bezw.

$$x^4 \mp y^4 = C;$$

andererseits werden die Projektionen der Falllinien der später behandelten Flächen $z = a\ (x^4 - y^4)$:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = C.$$

Hieraus ergiebt sich für die Flächen vierter und fünfter Ordnung:

$$z = a\,(x^4 \mp y^4) \text{ und } z = a\left(\frac{1}{x^2} \pm \frac{1}{y^2}\right)$$

die in folgendem Satz ausgedrückte merkwürdige Wechselbeziehung:

»*Die auf der xy-ebene senkrechten Cylinder, welche die Niveaulinien bezw. Falllinien der einen der beiden Flächen enthalten, schneiden auf der anderen die Falllinien bezw. Niveaulinien aus.*«

Bei dieser Gelegenheit seien einige Eigenschaften der allgemeineren Flächen

$$z = a\,(x^{2n} - y^{2n})$$

angeführt, zu denen ausser den eben behandelten auch die später auftretende

$$z = a\,(x^{4/3} - y^{4/3})$$

gehört. Bezeichnet man nämlich in leicht verständlicher Weise wegen:

$x^{2n} - y^{2n} = (x^n + y^n)(x^n - y^n)$ die Flächen $z_1 = x^n + y^n$, $z_2 = x^n - y^n$ als »Zerlegungsflächen« der gegebenen N^2-fläche $z = x^{2n} - y^{2n}$, so gilt, da die Projektionen der beiden Asymptotenlinienscharen der Fläche $z = x^{2n} - y^{2n}$ die Gleichungen:

$$x^n \pm y^n = C$$

haben, der Satz: »*Die beiden Scharen der Asymptotenlinien der N^2-fläche $z = x^{2n} - y^{2n}$ werden von der zur z-axe parallelen Cylindern ausgeschnitten, die durch die Niveaulinien ihrer Zerlegungsflächen gelegt sind.*«

Für die Flächen $z = a\,(x^m \pm y^m)$ lässt sich ferner der allgemein giltige Satz aussprechen: »*Das Volumen dieser Flächen zwischen den Koordinatenebenen und den zu diesen durch den beweglichen Flächenpunkt xyz gelegten Parallelebenen ist gleich dem $(m+1)^{ten}$ Teil des Parallelepipeds, dessen Kanten die Koordinaten des beweglichen Flächenpunktes sind.*« Für die Kubatur der P- und N-flächen hat man nämlich:

$$V = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} (f(x) \pm f(y))\, dx\, dy =$$

$$= (y - y_0) \int_{x_0}^{x} f(\sigma)\, d\sigma \pm (x - x_0) \int_{y_0}^{y} f(\sigma)\, d\sigma,$$

somit für $f(\sigma) = a \overset{m}{\sigma}$ und $x_0 = y_0 = 0$:

$$V = \frac{a}{m+1}\, xy\, (x^m \pm y^m) = \frac{1}{m+1} \cdot xyz.$$

§ 8. **N-fläche mit einer Schar Asymptotenlinien als Falllinien.**

Um die N-flächen zu finden, deren eine Asymptotenlinienschar

$$\int du \sqrt{f''(u)} + \int dv \sqrt{f''(v)} = C$$

mit den Falllinien

$$\int \frac{du}{f'(u)} + \int \frac{dv}{f'(v)} = C$$

zusammenfällt, hat man f zu bestimmen aus $f'(u) : \sqrt{f''(u)} = 1 : a$ und erhält:

$$z = \frac{3 \overset{3}{\sqrt{3}}}{4 \cdot a} [(ax + b)^{4/3} + (ay + b)^{4/3}].$$

Sollen die Asymptotenlinienprojektionen die vorgegebene Form

$$\varphi(x) + \varphi(y) = C$$

haben, so erhält man:

$$f(x) = a \int dx \int \varphi'^2(x)\, dx + bx + c.$$

Interessant sind hier die Spezialfälle $\varphi(x) = x^{3/3}$ (Astroidenschar) mit den Flächen:

$$z = a(x^{4/3} - y^{4/3}) + b(x - y)$$

und $\varphi(x) = x^2$ (konzentrische Kreise) mit den Flächen vierter Ordnung:

$$z = a(x^4 - y^4) + b(x - y).$$

Auf allgemeinere Flächen mit ähnlichen Gleichungen kommt man durch folgende Fragestellung: Giebt es N-flächen und Kurven von der Form

$$\psi(u) + \psi(v) = C$$

auf ihnen, so dass die durch

$$f''(x)\psi'(y)\,dx + f''(y)\psi'(x)\,dy = o$$

bestimmten Projektionen der konjugierten Kurven Parallelkurven werden? Die Bedingung dafür, dass $Pdx + Qdy = o$ eine Schar von Parallelkurven vorstellt,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right),$$

liefert im vorliegenden Fall die Magnus'sche Gleichung:

$$f''(x)\psi'^2(x)f''^2(y)\psi''(y) + f''(x)f'''(x)\psi'(x)f''(y)\psi'^2(y) = f''(y)\psi'^2(y)f''^2(x)\psi''(x) + f''(y)f'''(y)\psi'(y)f''(x)\psi'^2(x)$$

mit dem Linearsystem:

$$\psi'^2(x) = c_{11}\psi''(x)f''(x) + c_{12}\psi'^2(x)$$
$$\psi'(x)f'''(x) = c_{21}\psi''(x)f''(x) + c_{22}\psi'^2(x).$$

Hieraus findet man zunächst $\psi(x)$ von der Form:

$$m + n(\alpha x + \beta)^c$$

und hierauf $f(x)$ von der Form:

$$p(\alpha x + \beta)^{c+2} + qx + r.$$

Für die Flächen $z = a(x^{4/3} - y^{4/3})$ speziell ist der Satz bemerkenswert:

»*Die drei Scharen der Asymptotenlinien, Falllinien und Kurven isokliner Normalen sind mit derjenigen identisch, welche von den Astroidencylindern* $x^{2/3} - y^{2/3} = C$ *ausgeschnitten wird.*«[1])

In Bezug auf die Krümmungslinien der Flächen

$$z = a(x^{4/3} - y^{4/3}),$$

wie der P- und N-flächen überhaupt, ist folgende Bemerkung von Bedeutung:

---

[1]) Von den Asymptotenlinien kommt nur die eine Schar in Betracht, deren Gleichung $\int du\sqrt{f''(u)} + \int dv\sqrt{f''(v)} = C$ ist.

In der Differentialgleichung für die Krümmungslinien:

$$\pm f''(u)\cdot f'(u)f'(v)du^2+\{f''(u)\,(1+f'^2(v))\mp f''(v)\,(1+f'^2(u)\}.$$
$$du\,dv-f''(v)f'(u)f'(v)dv^2=0,$$

in der nur die ersten und zweiten Ableitungen von f zugleich vorkommen, macht man in manchen Fällen mit Vorteil von der Substitution Gebrauch:

$$f'(u)=\xi,\ f'(v)=\eta.$$

Gehört dann zu $Y=f'(X)$ die Umkehrung $X=U(Y)$, so ist wegen $dY=f''(X)\,dX$, die Beziehung $X=U(Y)$ mit $\int\frac{dY}{f''(X)}$ gleichbedeutend, woraus folgt:

$$f''(X)=\varphi(Y)=\frac{1}{U'(y)}.$$

Indem also nach diesen Bemerkungen

$$f''(u)=\varphi(\xi),\ f''(v)=\varphi(\eta),\ du=\frac{d\xi}{\varphi(\xi)},\ dv=\frac{d\eta}{\varphi(\eta)}$$

zu setzen ist, geht die Differentialgleichung über in:

$$\pm\frac{\xi\eta}{\varphi(\xi)}d\xi^2+\left(\frac{1+\eta^2}{\varphi(\eta)}\mp\frac{1+\xi^2}{\varphi(\xi)}\right)d\xi\,d\eta-\frac{\xi\eta}{\varphi(\eta)}d\eta^2=0.$$

Diese Substitution ist besonders dann von Wert, wenn φ, was auch bei transcendentem f eintreten kann, rational wird.[1])

In dem obigen Fall $f(x)=ax^{4/3}$, wo $f''(x)=\frac{64\,a^3}{81\,f'^2(x)}$, also $\varphi(v)=\frac{64\,a^3}{81\,v^2}$ wird, heisst die transformierte Differentialgleichung:

$$\xi^3\eta\,d\xi^2-\{\eta^2(1+\eta^2)+\xi^2(1+\xi^2)\}\,d\xi\,d\eta+\xi\eta^3d\eta^2=0.$$

---

[1]) Das Komplanationsintegral:

$$o_{P,N}=\int\int dx\,dy\,\sqrt{1+f'^2(x)+f'^2(y)},$$

aus dem man übrigens ersieht, dass zu den P- und N-flächen zwischen gleichen Grenzen gleiche Oberflächen gehören, kann durch die gleiche Transformation in die oft vorteilhafte Form:

$$o=\int\int\frac{d\xi}{\varphi(\xi)}\cdot\frac{d\eta}{\varphi(\eta)}\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}$$ übergeführt werden.

Multipliziert man hier mit $\xi\eta$ durch und setzt $\xi^2 = u$, $\eta^2 = v$, so erhält man

$$du^2 - \left(\frac{1+v}{u} + \frac{1+u}{v}\right) du\, dv + dv^2 = 0$$

und mit Rücksicht auf die Identität

$$du^2 - 2du\, dv + dv^2 = [d(u - v)]^2,$$

wenn man $u + v = \sigma$, $u - v = \tau$ setzt, die einfache Form:

$$\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2 = \frac{\tau^2 + \sigma}{\sigma^2 + \sigma}.$$

Von der Integration dieser Differentialgleichung hängt somit die Darstellung der Krümmungslinien der Flächen $z = a(x^{4/3} - y^{4/3})$ in endlicher Form ab.

§ 9. Fläche mit einer Schar von Krümmungslinien in parallelen Ebenen.

Eliminiert man aus der Differentialgleichung

$$(\alpha + \gamma f'(u))\, du + (\beta + \gamma f'(v))\, dv = 0$$

der von den Parallelebenen

$$x\alpha + y\beta + z\gamma - \lambda = 0$$

aus den P-flächen ausgeschnittenen Kurven aus der Krümmungsliniengleichung die Grösse $\frac{du}{dv}$, so erhält man unter der notwendigen Annahme $\beta = \alpha$ die Magnus'sche Gleichung:

$$f''(u) \cdot f'(u) f'(v) (\alpha + \gamma f'(v))^2 + (1 + f'^2(u)) (\alpha + \gamma f'(u)) (\alpha + \gamma f'(v)) f''(v) =$$
$$f''(v) f'(v) f'(u) (\alpha + \gamma f'(u))^2 + (1 + f'^2(v)) (\alpha + \gamma f'(v)) (\alpha + \gamma f'(u)) f''(u)$$

mit dem Linearsystem:

$$f''(u) f'(u) = c_{11} f'(u) (\alpha + \gamma f'(u))^2 + c_{12} f''(u) (\alpha + \gamma f'(u))$$
$$1 + f'^2(u) = c_{12} f'(u) (\alpha + \gamma f'(u) + c_{22} f''(u).$$

Wegen $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, $\beta = \alpha$ ist hier $\alpha^2 = {}^1/_2 (1 - \gamma^2)$ zu setzen, so dass die Konstanten c_{11}, c_{12}, c_{22} und γ disponibel bleiben.

$\gamma = 1$, $\alpha = 0$, $c_{11} = 0$, $c_{12} = 1$, $c_{22} = \frac{1}{m}$ giebt Uebereinstimmung der Gleichungen des Linearsystems und den Fall $f''(u) = m$ des Paraboloids.

Auch die allgemeinste Methode, um das eben behandelte Problem zu erledigen, sei hier angedeutet: Sollen die Gleichungen

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v)$$

die P-fläche $z = f(x) + f(y)$ darstellen, so muss die Funktionalgleichung:

$$\chi = f(\varphi) + f(\psi)$$

erfüllt sein. Dieselbe ist, wie man durch partielle Differentiation und Elimination von $f'(\varphi)$, $f'(\psi)$, $f''(\varphi)$, $f''(\psi)$ findet, aquivalent mit der partiellen Differentialgleichung:

$$\text{I.}\quad C\cdot C' \frac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial v} = C\left(A' \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + B' \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) +$$

$$+ C'\left(A \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + B \frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right).$$

in welcher bedeuten:

$$A = \frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v};\quad B = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v};$$

$$C = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v};$$

$$P = \frac{\partial^2\chi}{\partial u^2} - \frac{A}{C}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{B}{C}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2};\quad Q = \frac{\partial^2\chi}{\partial v^2} - \frac{A}{C}\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 v} - \frac{B}{C}\frac{\partial\psi^2}{\partial v^2};$$

$$A' = P\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 - Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2;\quad B' = Q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - P\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2;$$

$$C' = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2.$$

Andrerseits ist die Bedingung, dass die Fläche $x = \varphi$, $y = \psi$, $z = X$ Krümmungslinien in parallelen Ebenen hat, durch das System von Gleichungen ausgedrückt:

$$\text{II.}\begin{cases} \varphi(u,v) = P(v)\mathrm{Cos}\,v - P'(v)\mathrm{Sin}\,v + [P(u)\mathrm{Sin}\,u + P'(u)\mathrm{Cos}\,u].\mathrm{Cos}\,v, \\ \psi(u,v) = P(v)\mathrm{Sin}\,v + P'(v)\mathrm{Cos}\,v + [P(u)\mathrm{Sin}\,u + P'(u)\mathrm{Cos}\,u].\mathrm{Sin}\,v, \\ \chi(u,v) = P(u)\mathrm{Cos}\,u - P'(u)\mathrm{Sin}\,u. \end{cases}$$ (Bianchi, pag. 144.)

(Dabei entsprechen die Kurven $u = C$, $v = C$ auf der Bildkugel bei der Gauss'schen Abbildung den Meridianen und Parallelkreisen.)

Durch Kombination von I und II würde man zur Bestimmung der zunächst willkürlichen Funktionen Φ und Ψ eine Funktionalgleichung erhalten.

§ 10. Flächen, deren Krümmungslinien eine Gleichung von vorgeschriebener Form haben.

Fragt man nach den P-flächen mitsamt ihren Krümmungslinien, von denen die Gleichung der einen Schar die Form

$$\varphi(u) + \varphi(v) = C$$

haben soll, so hat man $-\frac{\varphi'(v)}{\varphi'(u)}$ in der Differentialgleichung für $\frac{du}{dv}$ zu setzen, woraus die Magnus'sche Funktionalgleichung:

$$f''(u)\,\varphi'^2(v) + \varphi'(u)\frac{1+f'^2(u)}{f'(u)}\cdot\frac{\varphi'(v)f''(v)}{f'(v)} = f''(v)\,\varphi'^2(u) +$$
$$+ \varphi'(v)\frac{1+f'^2(v)}{f'(v)}\cdot\frac{\varphi'(u)f''(u)}{f'(u)}$$

resultiert mit dem Linearsystem:

$$f''(u) = c_{11}\,\varphi'^2(u) + c_{12}\frac{\varphi'(u)f''(u)}{f'(u)}$$
$$\frac{1+f'^2(u)}{f'(u)} = c_{12}\,\varphi'(u) + c_{22}\frac{f''(u)}{f'(u)}.$$

Nach Elimination von φ' erhält man zur Bestimmung von f' die Gleichung:

$$c_{22}(c_{11} - c_{12}^2)f''^2(u) + f''(u)\,[c_{12}^2 - 2c_{11}c_{22}(1+f'^2(u))] +$$
$$+ c_{11}[1+f'^2(u)]^2 = 0,$$

von der sich ein erstes Integral in der Form

$$au + b = \int \frac{df'(u)}{F(f'(u))}$$

angeben lässt. Dabei ist:

$$F(f'(u)) = \frac{1}{2\,c_{22}\,(c_{11} - c_{12})^2}\cdot\Big\{2\,c_{11}\,c_{22}\,(1+f'^2(u)) - c_{12}^2 \pm$$
$$\pm \sqrt{[2\,c_{11}\,c_{22}(1+f'^2(u)) - c_{12}^2]^2 - 4\,c_{11}\,c_{22}(c_{11} - c_{12}^2)(1+f'^2(u))^2}\Big\}.$$

Der Spezialfall $c_{12} = 0$ giebt vermöge

$$c_{22}f''(u)\big(f''(u) - 2(1+f'^2(u))\big) + (1+f'^2(u))^2 = 0,$$

wenn man $c_{22} = -\frac{1}{a(a-2)}$ setzt, die Gleichung

$$f''(u) = a(1 + f'^2(u)).$$

Diese resultiert auch aus der Bedingung, dass der Koëffizient von $du\,dv$ in der Differentialgleichung für die Krümmungslinien der P-flächen verschwinde, was eintritt für

$$f(x) + \frac{1}{a} \log \operatorname{Cos}(ax + b).$$

Die Krümmungslinien findet man dann durch Quadraturen allein aus

$$f''(u)\,du^2 - f''(v)\,dv^2 = 0.$$

Die so erhaltene Fläche

$$z = \frac{1}{a}[\log \operatorname{Cos}(ax + b) + \log \operatorname{Cos}(ay + b)]$$

enthält für $a = 2$ einen bemerkenswerten Spezialfall, auf den man auch explicite durch die Bedingung

$$H_P = \frac{\delta^2 \omega}{\delta u\,\delta v} \text{ oder } \frac{K_P}{H_P} + \operatorname{Sin} \nu = 0$$

kommt; denn aus

$$-\frac{H_P}{S} = \frac{f''(u)(1+f'^2(v)) + f''(v)(1+f'^2(u))}{S^4} \cdot K_P - \frac{f''(u)\,f''(v)}{S^4}$$

folgt für $-H_P = K_P \cdot S$ der Reihe nach:

$$\frac{1+f'^2(u)}{f''(u)} + \frac{1+f'^2(v)}{f''(v)} = 1,\ \frac{f''(u)}{1+f'^2(u)} = 2 = \frac{f''(v)}{1+f'^2(v)},$$

also $a = 2$.

Durch die Substitution:

$$ax + b = \frac{\pi}{2} - \xi,\ ay + b = \frac{\pi}{2} - \eta,\ e^{az} = \zeta$$

geht die Fläche $z = \frac{1}{a} \log [\operatorname{Cos}(ax + b) \cdot \operatorname{Cos}(ay + b)]$ über in die von J. Zeidler[1]) genauer diskutierte Fläche

$$\zeta = \operatorname{Sin} \xi \cdot \operatorname{Sin} \eta.$$

[1]) J. Zeidler, XXVI. Jahresbericht der Communal-Oberrealschule in Leitmeritz 1892.

Für die Krümmungslinien von

$$z = \frac{1}{a} \log [\mathrm{Cos}\,(ax + b) \cdot \mathrm{Cos}\,(ay + b)]$$

erhält man nach oben die Gleichungen:

$$\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(ax + b)\right) \cdot \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(ay + b)\right) = C,$$

$$\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(ay + b)\right) : \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(ax + b)\right) = C'.$$

Diese Projektionen stimmen überein mit denen der Asymptotenkurven der Minimalflächen

$$z = \frac{1}{a}(\log \mathrm{Cos}\,(ax + b) - \log \mathrm{Cos}\,(ay + b)).$$

Ferner gelten die Sätze: »*Die Falllinien der vorgelegten P-fläche und die Niveaulinien der obigen Minimalfläche liegen auf denselben zur z-axe parallelen Cylindern*« und: »*Auf der vorgelegten P-fläche ist das System der orthogonalen Diagonalkurven der Aequidistanten $x = C$, $y = C$ mit dem der Krümmungslinien identisch.*«

Für den Fall $a = 1$, $b = 0$, auf den sich übrigens der allgemeine Fall durch die lineare Transformation $ax + b = \xi$, $ay + b = \eta$, $az = \zeta$ reduziert, ist es leicht, die Stellen der xy-ebene anzugeben, über welchen reelle Flächenteile liegen. Da der Cos eine gerade Funktion ist, braucht man nur den ersten Quadranten zu untersuchen, woselbst die x und y positiv sind. Aus

$$z = \log [\mathrm{Cos}\, x \cdot \mathrm{Cos}\, y]$$

folgt ferner, dass reelle z-werte nur dann resultieren können, wenn $\mathrm{Cos}\, x$ und $\mathrm{Cos}\, y$ gleiches Zeichen haben, so dass also von imaginären Teilen unterbrochene, periodisch sich wiederholende Flächenparzellen entstehen. Zeichnet man nämlich im ersten Quadranten die Geraden $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $y = k \cdot \frac{\pi}{2}$, so kann z nur über den schraffierten Teilen (Fig. 3) reell sein, da nur hier $\mathrm{Cos}\, x$ und $\mathrm{Cos}\, y$ gleiches Vorzeichen haben, d. h. nur die Quadrate kommen in Betracht, welche von den Geraden:

$$x = (4n - 1)\frac{\pi}{2}, \quad x = (4n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad y = (4m - 1)\frac{\pi}{2},$$

$$y = (4m + 1)\frac{\pi}{2}$$

gebildet werden und zwar als Repräsentant für alle das Quadrat $ABCD$, in welchem beständig $-\frac{\pi}{2} < \left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. < +\frac{\pi}{2}$ ist. Die Ebenen $y = x$, $y = -x$, $x = 0$, $y = 0$ sind Symmetrieebenen der Fläche. Die zum Quadrat $ABCD$ gehörige Parzelle erstreckt sich wegen $\operatorname{Cos} x < 1$, $\operatorname{Cos} y < 1$ ins negative z-gebiet und hat die Ebenen $x = -\frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2}$, $x = +\frac{\pi}{2}$, $y = +\frac{\pi}{2}$ zu Asymptotenebenen. Der Mittelpunkt des Quadrates, in welchem die Fläche von der xy-ebene berührt wird, ist eine Maximumstelle.

§ 11. Die P- und N-flächen als W-flächen.

Die Frage nach allen W-flächen[1]) unter den Flächen $z = f(x) \pm f(y)$ führt wegen:

$$\frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_2}{\partial v} = \frac{\partial r_1}{\partial v}\frac{\partial r_2}{\partial u} \text{ oder } \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial v} = \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial K}{\partial u}$$

zum Teil auf Magnus'sche Funktionalgleichungen, welche wegen ihrer Weitläufigkeit hier nicht mehr behandelt sind. Dass jedoch Lösungen von ihnen existieren, geht aus der Thatsache hervor, dass die früher erhaltene Fläche:

$$z = \frac{1}{a}\left[\log \operatorname{Cos}(ay + b) - \log \operatorname{Cos}(ax + b)\right]$$

als Minimalfläche zu den Weingarten'schen W-flächen gehört. ($r_1 + r_2 = 0$!)

§ 12. Verwertung des Symbols für die flächentreuen infinitesimalen Transformationen.

Die Kurvenschar $\omega(x, y) = C$ gestattet die infinitesimale flächentreue Transformation

[1]) Flächen, für welche zwischen den Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 eine Relation $f(r_1, r_2) = 0$ besteht, werden bei Bianchi, ebenso in dem bekannten Werk von Darboux, als W-flächen bezeichnet.

$$U_\chi = \frac{\partial \varrho}{\partial y}\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \varrho}{\partial x}\frac{\partial \chi}{\partial y},$$

deren Bahnkurven durch $\varrho = C$ gegeben sind, wenn $U\omega$ eine Funktion von ω ist, wenn also die Bedingung

$$U\omega = \Omega(\omega)$$

erfüllt ist. (S. Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen, h. v. Scheffers, pag. 82 und pag. 89 ff.) Hieraus erhält man durch partielle Differentiation und Eliminiation von $\Omega'(\omega)$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} - \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\frac{\partial \varrho}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x\,\partial y} =$$

$$- \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y\,\partial x}\frac{\partial \varrho}{\partial x} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial y\,\partial x}.$$

Diese Bedingung geht für

$$\omega = \varphi(y) + \varphi(x),\ \varrho = \psi(y) - \psi(x)$$

in die Magnus'sche Funktionalgleichung über:

I. $\varphi'^2(x)\psi''(y) + \varphi'(x)\psi'(x)\varphi''(y) = \varphi'^2(y)\psi''(x) + \varphi'(y)\psi'(y)\varphi''(x)$

mit dem Linearsystem:

$\varphi'^2(x) = c_{11}\psi''(x) + c_{12}\varphi''(x),\ \ \varphi'(x)\psi'(x) = c_{21}\psi''(x) + c_{22}\varphi''(x),$

welches immer lösbar ist und zwar auch noch in dem Fall $\varphi = \psi$, wenn man nur $c_{11} = c_{12} = c_{22} = c'$ setzt. Dann folgt:

$$\varphi'^2(x) = -c'\varphi''(x),\ \ \varphi(x) = c' \log x + d.$$

Für $\varphi(x) = \int dx \sqrt{f''(x)}$ erhält man daher:

$$f(x) = c \log x + mx + n;\ \ z = c \log \frac{y}{x} + m(y - x).$$

Dies aber ist der schon durchgeführte Fall der Regelfläche.

In diesem Zusammenhang sei zum Schluss ein Satz von allgemeinem Interesse mitgeteilt, der bisher noch nicht bekannt zu sein scheint.

Die Bedingungsgleichung für die oben definierten W-flächen ist:

$$\frac{\partial r_1}{\partial y}\frac{\partial r_2}{\partial x} - \frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial r_2}{\partial y} = 0 \text{ oder } \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial y} = 0.$$

Ist ferner $\varrho(x, y)$ eine beliebige Funktion, so sind alle infinitesimalen flächentreuen Transformationen der Ebene mit

den aus $U\omega = 0$
zu findenden Invarianten durch das Symbol vertreten:

$$Uf = \frac{\partial \varrho}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \varrho}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Setzt man nun ϱ speziell $= r_1$ oder $= H$, bezw. $= r_2$ oder $= K$, so ist $U\omega = 0$ im Fall der W-flächen durch r_2 oder K bezw. r_1 oder H erfüllt und man erhält den Doppelsatz: »*Im Falle der Weingarten'schen W-flächen kann man den einen Hauptkrümmungsradius* $\begin{cases} r_2 \\ r_1 \end{cases}$ *bezw. die eine Krümmung* $\begin{cases} H \\ K \end{cases}$ *als Invariante der flächentreuen infinitesimalen Transformation:*

$$Uf = \begin{cases} \frac{\partial r_1}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial r_2}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

$$\text{bezw. } Uf = \begin{cases} \frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

betrachten, indem man unter

$$\begin{cases} \frac{\partial r_1}{\partial y}, -\frac{\partial r_1}{\partial x} \\ \frac{\partial r_2}{\partial y}, -\frac{\partial r_2}{\partial x} \end{cases}$$

$$\text{bezw.} \begin{cases} \frac{\partial K}{\partial y}, -\frac{\partial K}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial y} \end{cases}$$

die Grössen ξ, η *der zugehörigen infinitesimalen Transformation*

$$x' = x + \xi\delta t,\ y' = y + \eta\delta t$$

versteht.«

Fig. 1.

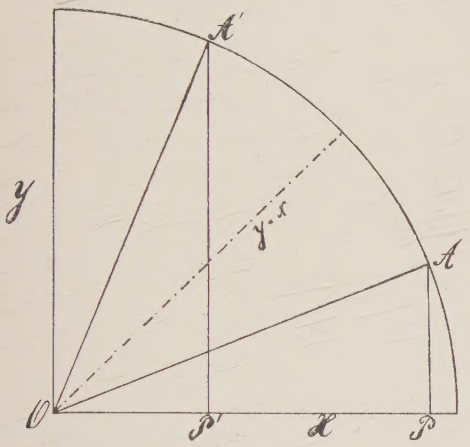

Fig. 3.

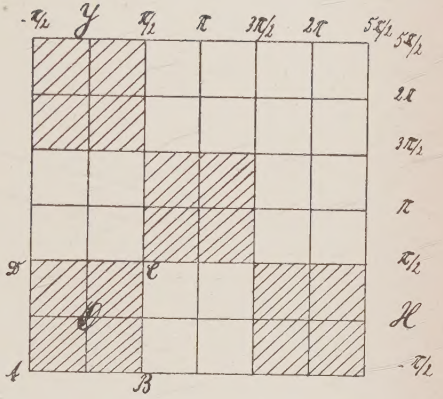
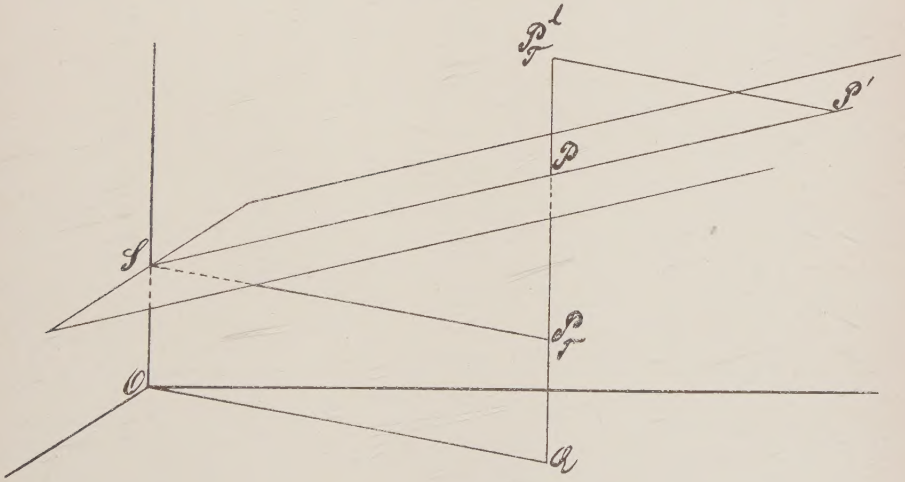
Fig. 2.